

文章编号 1004-924X(2013)07-1873-08

三旋翼飞行器动力学分析及建模

杨 阳^{1*}, 崔金峰¹, 余 毅^{1,2}

- (1. 长春理工大学 电子信息工程学院, 吉林 长春 130022;
2. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033)

摘要:根据国内外旋翼飞行器的发展趋势,提出了三旋翼飞行器的研究方案。首先,介绍了三旋翼无人飞行器的机械结构,分析了它的整体物理力矩,理论解决了力矩相互抵消的问题。其次,对飞行器的起飞、俯仰、滚转、偏航等姿态进行了数学分析,建立了三旋翼无人飞行器的数学模型。最后,利用 PID 控制法和线性二次高斯(LQG)控制方法设计了三旋翼飞行器的控制器。实验结果表明,PID 控制器振荡时间比较长,次数较多,没有达到理想状态;利用 LQG 方法对控制器进行了改进,对各个通道阶跃函数及脉冲响应函数仿真图的分析显示,系统改进后响应速度有了提高,2 s 左右受控达到平衡。本文的研究为无人机的姿态控制提供了理论基础。

关键词:三旋翼飞行器;飞行姿态;矩阵分析;PID 控制;LQG 控制

中图分类号:V249.1;TP273.5 文献标识码:A doi:10.3788/OPE.20132107.1873

Dynamical analysis and mathematical modeling of tricopter

YANG Yang^{1*}, CUI Jin-feng¹, YU Yi^{1,2}

- (1. College of Electronic and Information Engineering,
Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;
2. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China)

* Corresponding author, E-mail: cloneyang@126.com

Abstract: This paper proposes research schemes for a tricopter based on its developing trend. It focuses on its mechanical structures and physical moments and solves the problem that moments in the system offset each other. Then, it analyzes aircraft attitudes on launching, pitching, rolling and yawing by aerodynamic analysis and establishes a mathematical model for the tricopter. Finally, the PID and Linear Quadratic Gaussian(LQG) control methods are used to design a controller for the tricopter. The results show that the PID method does not achieve the desired states for its long equilibrium time and overmuch oscillations. However, after improving the controller by the LQG method, the simulation experiments on step functions and pulse response functions from different channels show that the response speed of the control has increased, and the balance of control can be implemented by about 2 s. the research can provide theoretical function for controlling aircraft attitudes.

Key words: tricopter; flight attitude; torque analysis; PID control; Linear Quadratic Gaussian(LQG) control

收稿日期:2012-11-29;修订日期:2013-01-04.

基金项目:长春理工大学科研发展基金资助项目(No. XJJ2008-02)

1 引言

目前世界范围内对于旋翼飞行器的研究主要针对四旋翼无人飞行器^[1-2]。迄今为止,虽然微小四旋翼飞行器的基础理论与实验研究已取得较大进展,但仍面临着诸多关键技术的挑战:如最优化总体设计、动力与能源问题、数学模型的建立、飞行姿态的控制等,这使其距离真正走向成熟、达到实用要求还有很大差距。

与四旋翼飞行器相比,三旋翼飞行器具有结构紧凑,耗能少等优点。但由于两种飞行器结构不同,三旋翼飞行器力矩分析方式、数学模型建立、飞行姿态控制与四旋翼飞行器有较大的不同。国内外对于三旋翼飞行器的研究尚处于待开发状态,本文在国内外相关研究基础上,提出了三旋翼飞行器的研究方案,意在为无人机的姿态控制研究提供有效途径并丰富了无人机领域的发展。

2 三旋翼无人机的力矩分析

三旋翼飞行器飞行过程中,电机会产生两种力,一种是电机产生的扭转力 f_1, f_2, f_3 ,在 X - Y 平面内扭转力可近似认为分别垂直作用于 l_1, l_2, l_3 上,如图1所示。另一种力是3个电机产生的升力 F_1, F_2, F_3 ,它的方向是垂直 X - Y 平面向上的,如图2所示。所以当飞机水平悬停于空中时,应当满足2个力矩平衡条件,一个使得飞机不会在 X - Y 平面旋转,另一个使得它不会在 Y - Z 面翻滚。第一个力矩平衡条件

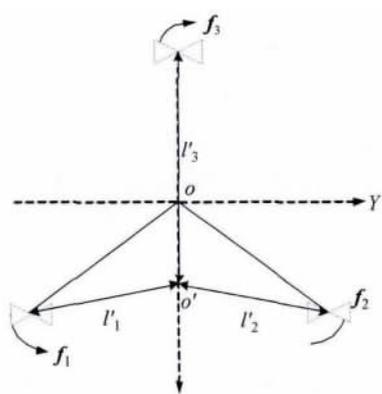


图1 扭转力 f_1, f_2, f_3 垂直作用于各轴

Fig. 1 Torsional forces f_1, f_2, f_3 acting on each axis perpendicularly

中, f_1 和 f_2 所对应的力矩垂直向上,而 f_3 对应的力矩垂直向下。由右手法则可知,前者会使飞机逆时针旋转,而后者会使其顺时针旋转。为了使力矩平衡,需要有下列的公式成立:

$$f_1 \cdot l'_1 + f_2 \cdot l'_2 = f_3 \cdot l'_3. \quad (1)$$

其中, l'_1, l'_2, l'_3 为各个扭转力到重心 o' 的力臂。

第二个力矩平衡是要使得飞行器不会绕着 X 轴翻滚,则有以下公式:

$$F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + m_0 g \cdot l_0 = F_3 \cdot l_3. \quad (2)$$

其中, $m_0 g$ 为配重, l_0 为配重器重心到支点 o 的距离。

另外,还需要让电机提供的升力与飞行器的重力相等,即:

$$F_1 + F_2 + F_3 = m_0 g + mg. \quad (3)$$

其中, mg 为三旋翼飞行器的质量。

假设 X 轴方向为前进方向, X, Y, Z 轴上的受力情况^[3-4]:

$$\mathbf{F}_{\text{total}} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中单个电机升力为:

$$F_i = K_i \cdot W_i^2 \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

式中,常数 K_i 表示第 i 个旋翼的升力系数; W_i 是第 i 个电机的角速度。

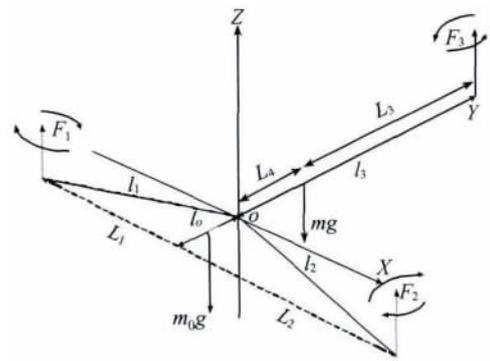


图2 升力 F_1, F_2, F_3 作用于各轴

Fig. 2 Lift forces F_1, F_2, F_3 acting on each axis perpendicularly

由图可知,三旋翼飞行器在 X, Y, Z 轴上的力矩分析如下^[5]:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} F_1 l_1 - F_2 l_2 \\ (F_1 + F_2) l_3 - F_3 l_4 \\ f_1 l_1 - f_2 l_2 - f_3 l_3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

3 三旋翼飞行器的坐标转换矩阵

沿着 x 轴方向的滚动单位矩阵方程如下^[3]:

$$\mathbf{R}(x, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

其中, φ 为沿着 x 轴方向的滚动角, 如图 3 所示。

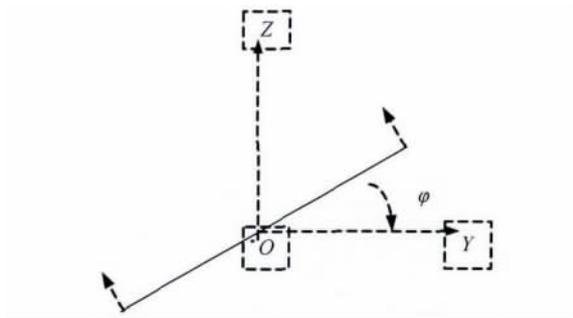


图 3 滚转角 φ
Fig. 3 Roll angle φ

沿着 y 轴方向滚动的矩阵方程如下:

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

其中, θ 为沿着 y 轴方向的滚动角, 如图 4 所示。

沿着 z 轴方向滚动的矩阵方程如下所示:

$$\mathbf{R}(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 三旋翼飞行器数学模型建立过程

x, y, z 轴 3 个方向三旋翼无人机受力情况如下:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{\text{total}} \cdot \mathbf{R}(\varphi, \theta, \psi) =$$

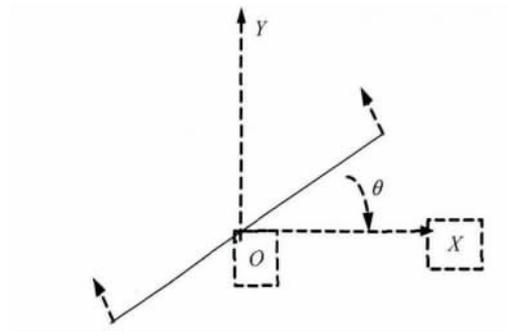


图 4 俯仰角 θ
Fig. 4 Pitch angle θ

其中, ψ 为沿着 z 轴方向的滚动角, 如图 5 所示。

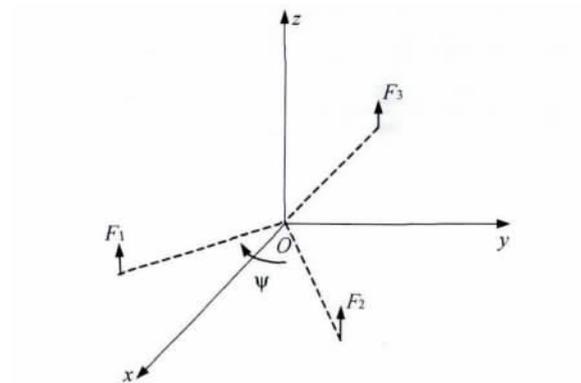


图 5 偏航角 ψ
Fig. 5 Yaw angle ψ

通过以上的公式可以得到坐标转换矩阵:

$$\mathbf{R}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{R}(z, \psi)\mathbf{R}(y, \theta)\mathbf{R}(x, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (7)$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 F_i \right) \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

根据牛顿第三定理, 建立在地面坐标下沿着 x, y, z 3 个方向的线性方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (F_x - K \cdot \dot{x})/m \\ \ddot{y} = (F_y - K \cdot \dot{y})/m, \\ \ddot{z} = (F_z - K \cdot \dot{z})/m \end{cases} \quad (9)$$

其中, K 为空气阻力系数, 根据欧拉方程可得到无人机角运动方程为:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = (F_1 \cdot L_1 - F_2 \cdot L_2) / I_x \\ \ddot{\theta} = (F_1 \cdot L_3 + F_2 \cdot L_3 - F_4 \cdot L_4) / I_y \\ \ddot{\psi} = (f_1 \cdot l_1 - f_2 \cdot l_2 - f_3 \cdot l_3) / I_z \end{cases} \quad (10)$$

由上式得出三旋翼直升机最终动力学数学模型方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (u(1)(\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi)) / m \\ \ddot{y} = (u(1)(\sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi)) / m \\ \ddot{z} = (u(1)(\cos \varphi \cos \theta)) / m - g \\ \ddot{\varphi} = u(2)L_1 / I_x \\ \ddot{\theta} = u(3)L_3 / I_y \\ \ddot{\psi} = u(4)l / I_z \end{cases} \quad (11)$$

其中, $l_i (i=1, 2, 3)$ 是无人机重心到每个螺旋桨的臂长, I_k 是对应轴的转动惯量。

由于设计的三旋翼飞行器的状态方程输出矩阵为 $Y = (\dot{z}, \varphi, \theta, \psi)^T$, 所以控制输入矩阵也应与输出矩阵相同, 为 $U = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T$, 设定输入的被控对象公式:

$$\begin{cases} u(1) = F_1 + F_2 + F_3 \\ u(2) = F_1 - F_2 \\ u(3) = 3(F_1 + F_2) - F_3 \\ u(4) = f_1 - f_2 - f_3 \end{cases} \quad (12)$$

5 三旋翼飞行器状态方程的建立^[6-7]及 PID 控制

通过上一节的三旋翼飞行器的非线性模型可得到如下状态方程:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \\ Y = (\dot{z}, \varphi, \theta, \psi)^T \\ U = (u(1), u(2), u(3), u(4))^T \end{cases} \quad (13)$$

其中, 系数矩阵表达式为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l/I_z \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通过如下公式利用 MATLAB 软件解得三旋翼飞行器的传递函数如下所示:

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B + D. \quad (15)$$

根据参考文献[3]设计的参数, 设定 $m = 5.4 \text{ kg}, l = 1 \text{ m}, I_x = I_y = 0.92 \text{ m}, I_z = 0.78 \text{ m}$ 得到的传递函数为:

$$G(S) = \begin{bmatrix} (5.4)/s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0.92)/s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0.92)/s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.78)/s^2 \end{bmatrix}$$

根据得到的三旋翼飞行器系统传递函数, 利用

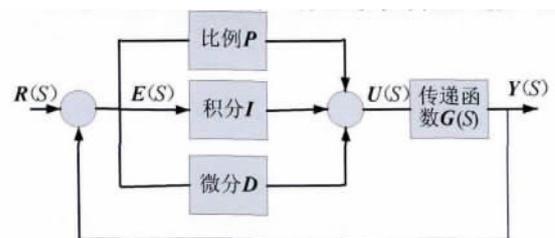


图 6 PID 控制结构图

Fig. 6 Structure diagram of PID control

Ziegler -Nichols 法设计了控制系统的 PID 控制器,并用 MATLAB 对各个通道进行了状态空间的单位阶跃响应、单位冲击响应、各个通道的阶跃响应仿真图如图 6~图 13 所示^[8-10](彩图见期刊电子版):

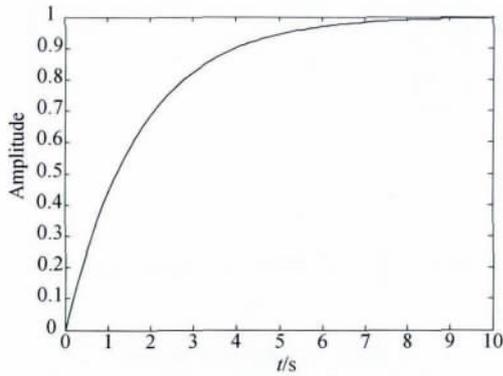


图 7 对 Z 通道增益 P 比例控制仿真图
Fig. 7 Simulation diagram of gain P-control for Z channel

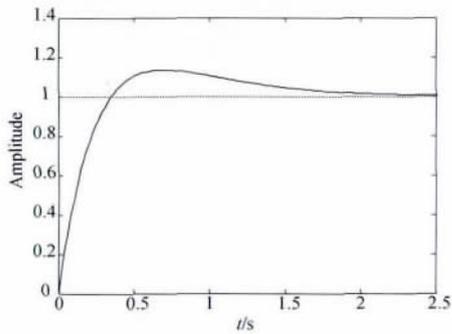


图 8 对 Z 通道增益 $k=1$, 时间 $t=0\sim 2.5$ s 的 PID 控制阶跃响应图
Fig. 8 Step response chart of PID control for channel Z with gain $k=1, t=0\sim 2.5$ s

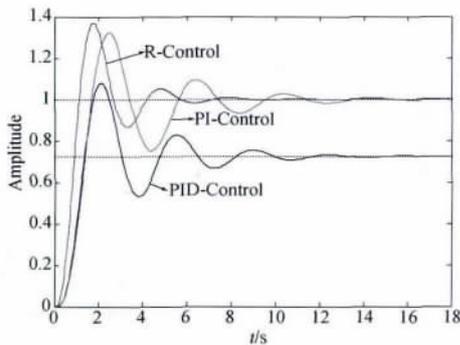


图 9 对 φ 和 θ 通道时间 $t=0\sim 18$ s 的 P, PI, PID 控制阶跃响应图
Fig. 9 Step response charts of P, PI, PID Controls for channels φ and θ with $t=0\sim 18$ s

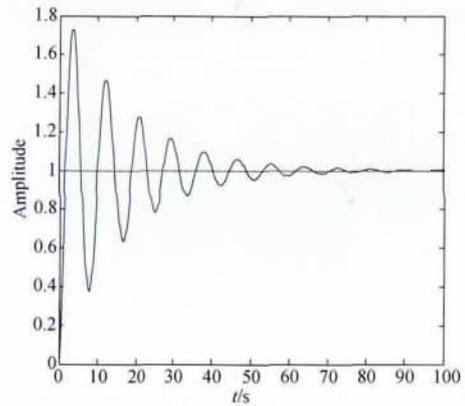


图 10 对 φ 和 θ 通道增益 $k=1$, 时间 $t=0\sim 2.5$ s 的 PID 控制阶跃响应图
Fig. 10 Step response chart of PID control for channels φ and θ with gain $k=1, time: t=0\sim 2.5$ s

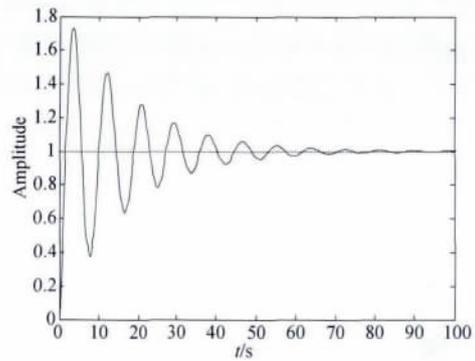


图 11 对 Z 通道增益 $k=1$, 时间 $t=0\sim 2.5$ s 的 PID 控制阶跃响应图
Fig. 11 Step response chart of PID control for channel Z with gain $k=1, time: t=0\sim 2.5$ s

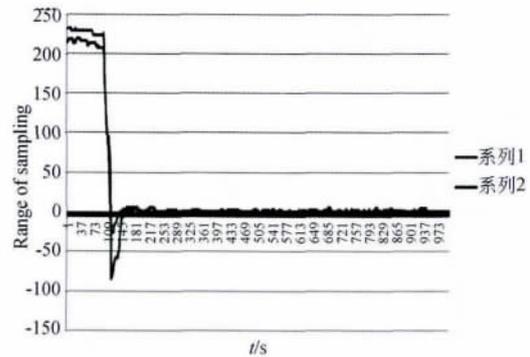


图 12 对 φ 和 θ 通道分别做 P(2)、PID(1)控制阶跃响应采样实测图
Fig. 12 Measured charts of step response sampling of P(2), PID(1) controls in channels φ and θ

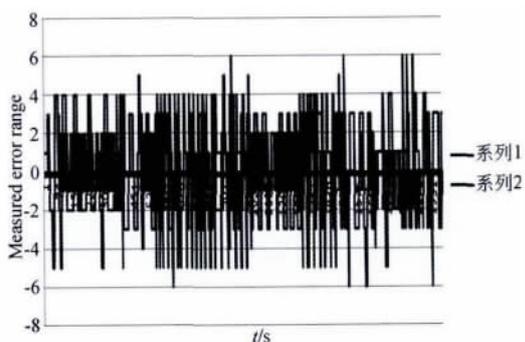


图 13 对 φ 和 θ 通道 P(2)、PID(1)控制阶跃响应采样实测的误差范围

Fig. 13 Measured error range of step response sampling for P(2), PID(1) controls in channels φ and θ

图 12 纵轴代表采样范围,横轴代表采样时间,由上图可知采样时间从 1~109 s 代表实物等待时间,从实测图中可以看出 P、PID 控制超调量大、采样时间内一直在持续振荡,振荡时间很长,实测振荡不能趋于平衡,实测没有达到理想中满意的效果。

6 LQG 控制仿真

由于三旋翼飞行器的模型是非线性的,PID 方法的控制效果没有达到理想效果,所以本文利用偏重于描述模型动态特征的 LQG 方法设计了三旋翼飞行器模型并进行仿真分析,仿真效果如下:

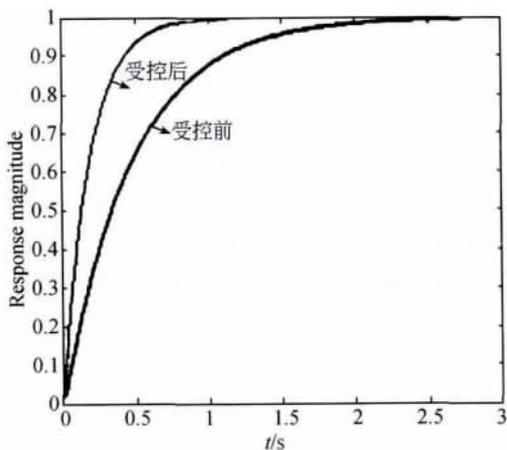


图 14 Z 通道阶跃函数

Fig. 14 Step response for channel Z

如图 14、图 15 所示,对 Z 通道控制器设定为

$$66.53/(S+173)。$$

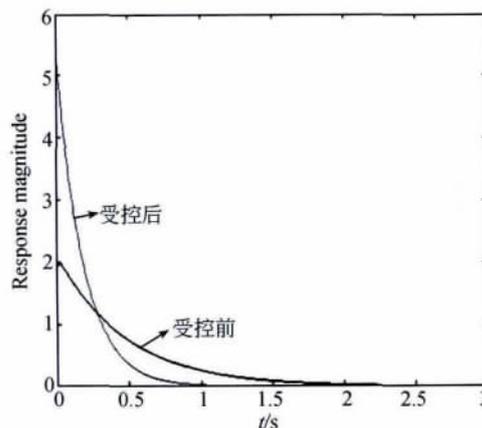


图 15 Z 通道脉冲响应图

Fig. 15 Impulse response for channel Z

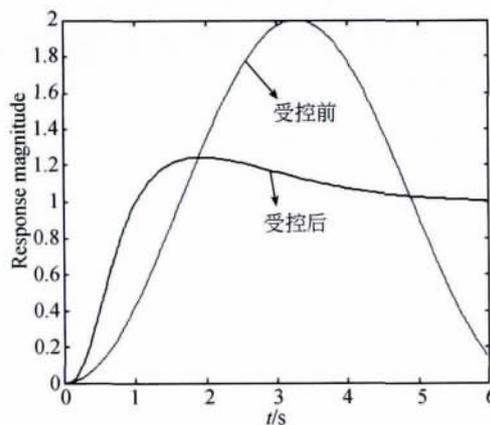


图 16 θ 和 φ 阶跃函数图

Fig. 16 Step response for channels φ and θ

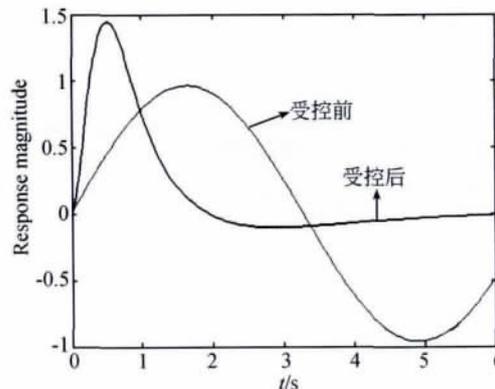


图 17 φ 和 θ 通道脉冲响应

Fig. 17 Impulse response for channels φ and θ

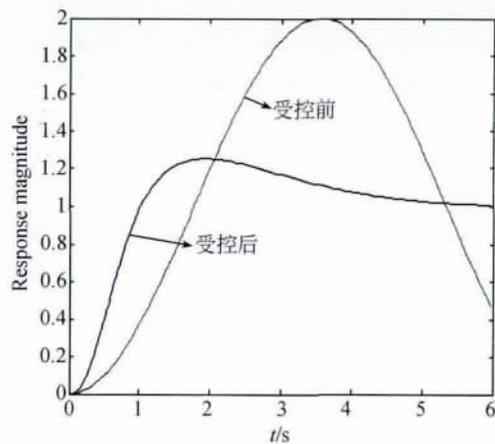
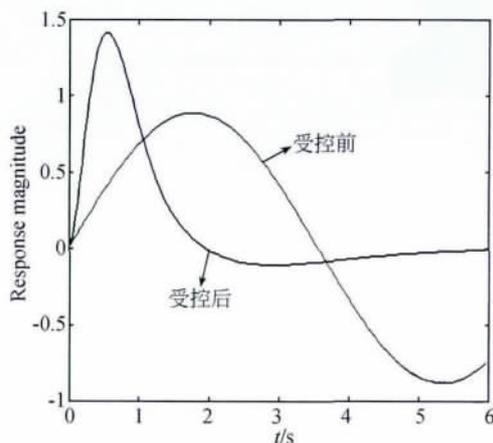
图 18 ψ 通道阶跃函数Fig. 18 Step response function for channel ψ 图 19 ψ 通道冲击响应函数Fig. 19 Impulse response function for channel ψ

图 16、图 17 为对三旋翼飞行器 φ 和 θ 通道进行 LQG 控制器设计仿真,该通道控制器设定为 $73.12(S+0.5279)/(S+4.885+4.731i)$ 。

图 18、图 19 为对三旋翼飞行器 ψ 通道进行 LQG 控制器设计仿真,经过程序计算对该通道控制器设定为 $74.16(S+0.5217)/(S+4.583+4.426i)$ 。

7 结 论

本文首先对三旋翼无人飞行器的机械结构进行了简单介绍,通过分析整体物理力矩,在理论上使得力矩相互抵消。其次,对飞行器的起飞、俯仰、滚转、偏航等姿态进行了数学分析,建立了三旋翼无人飞行器的数学模型。最后得出飞行姿态控制系统的运动学方程,并利用 MATLAB 软件进行了仿真验证。实验结果表明,利用 PID 方法的三旋翼飞行器控制系统在增益 $k=1$,时间 $t=0\sim 100$ s 时,振荡趋于平衡的时间大约在 $80\sim 100$ s,即调节时间比较长,振荡次数较多,且超调量大,所以三旋翼飞行器的 PID 控制系统设计没有达到理想状态。利用 LQG 方法进行了改进,通过对各个通道阶跃函数及脉冲响应函数仿真图的分析得出,受控后曲线的纵轴能够控制在 1.5 以内,2 s 左右受控达到平衡,取得了较满意的效果。

参考文献:

- [1] 刘丽丽. 四旋翼飞行仿真器的建模及控制方法研究[D]. 长沙:中南大学,2009.
LIU L L. *Research on the Modeling and Control to a Quadrotor Helicopter Simulator*[D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese)
- [2] 刘焕晔. 小型四旋翼飞行器飞行控制系统研究与设计[D]. 上海:上海交通大学,2009.
LIU H Y. *Study and design of flight control systems for small scale quadrotor* [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University. (in Chinese)
- [3] 王树刚. 四旋翼直升机控制问题研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2006.
- [4] SALAZAR-CRUZ S, KENDOUL F, *et al.*. Real-Time Control of a Small-Scale Helicopter Having Three Rotors[C]. *International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, P. R. China: IROS, 2006: 2924-2929.*
- [5] SALAZAR-CRUZ S, LOZANO R. Stabilization and nonlinear control for a novel tri-rotor mini-aircraft[C]. *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation, Barcelona, Spain: IEEE ICRA '05, April 2005: 2612-2617.*
- [6] TAYEBI A, MCGILVRAY S. Attitude stabilization of a four-rotor aerial robot[C]. *IEEE Confer-*

- ence on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas: CDC, 2004, 2: 1216-1221.
- [7] GUENARD N, HAMEL T, MOREAU V. Dynamic modeling and intuitive control strategy for an "X4-flyer" [C]. *International Conference on Control and Automation, Budapest, Hungary: ICCA 05*, 2005, 1: 141-146.
- [8] SALAZAR-CRUZ S, KENDOUL F, *et al.*. Real-Time stabilization of a small three-rotor aircraft[J]. *Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44 (2): 783-794.
- [9] ESCARENO J, SANCHEZ A, GARCIA O, LOZANO R. Triple tilting rotor mini-UAV: modeling and embedded control of the attitude[C]. *American Control Conference, Seattle, Washington, USA: ACC*, 2008: 3476-3481.
- [10] CASTILLO P, DZUL A, LOZANO R. Real-Time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft[C]. *43th IEEE conf. Control Systems Technology, July*, 2004: 12(4): 510-516.

作者简介:



杨 阳(1979—),男,吉林长春人,博士,讲师,2001年于四川大学获得学士学位,2005年于长春理工大学获得硕士学位,2012年于长春理工大学获得博士学位,主要从事多维系统、伺服控制等方面的研究。E-mail: cloneyang@126.com



余 毅(1979—),男,江西人,副研究员,博士研究生,2001年于吉林大学获得学士学位,主要从事光电测量总体技术研究和精密伺服控制技术。E-mail: yyciomp@139.com



崔金峰(1987—),男,吉林延边人,硕士研究生,现为长春理工大学电信学院硕士研究生,专业为模式识别与智能系统,主要从事旋翼飞行器方面的研究。E-mail: cuijinfeng870418@163.com